Problem površine i određeni integral
Vrsta: Seminarski | Broj strana: 9 | Nivo: Fakultet

U začetcima matematike jedan od osnovnih zadataka je bio problem računanja površine i volumena. Površina pravokutnika se lako određuje iz izmjerenih duljina stranica a i b jer je njegova površina definirana kao produkt stranica, tj. P=ab. Površinu paralelograma i trokuta možemo mjeriti transformacijom pravokutnika, dok se bilo koji mnogokut može podijeliti na trokute i tako možemo izračunati njegovu površinu.
Problem je što se na ovaj način ne može mjeriti površina bilo kojeg lika, kojemu je jedan rub opisan krivuljom,. Takav jednostavan skup nazivamo krivocrtnim trapezom. To je skup točaka ravnine omeđenih sa tri strane dužinama, a s četvrte strane krivuljom. Već pri izvodu površine kruga moramo se koristiti aproksimacijama.
Arhimed, jedan od najvećih matematičara stare Grčke, se već u trećem stoljeću prije nove ere koristio postupkom koji je kasnije nazvan metoda iscrpljivanja ili ekshaustije. On je računao površinu kruga upisujući mu i opisujući pravilne mnogokute. Povećavajući im broj stranica, mogao je izračunati površinu sa dovoljnom točnošću. Koristeći metodu ekshaustije i ravnoteže poluge Arhimed je izračunao volumen kugle i površinu sfere. Upisujući krugu pravilni 96-terokut našao je aproksimaciju EMBED Equation.3 . Arhimeda mnogi smatraju duhovnim začetnikom infinitezimalnog računa.
Matematičari su na različite načine pokušali riješiti problem računanja volumena i površine i imali su metode prilagođene konkretnom liku ili tijelu. Tek krajem 17.stoljeća taj problem je riješen, ali ne geometrijski već analitički.
2. POVRŠINA KRIVOCRTNOG TRAPEZA I INTEGRALNE SUME
Slično kao i računanju površine kruga možemo prići i računanju bilo kojeg lika omeđenog «glatkom» zatvorenom krivuljom. Horizontalnim i vertikalnim cijepanjem možemo svaki lik podijeliti na više krivocrtnih trapeza. Tako problem površine krivocrtnog trapeza svodimo na računanje površine ispod grafa neke funkcije.
Uzmimo neku funkciju f neprekinutu i pozitivnu na [a,b]. Površinu ćemo aproksimirati pravokutnicima. Najprije odaberemo n-1 različitu točku iz intervala [a,b] tako da vrijedi
$a=x0<x1<\ldots<xi-1<xi<\ldots.<xn-1$
Svaku takvu podjelu nazivamo subdivizijom i označavamo sa ||(||. Duljina svakog intervala je (xi=xi-xi-1, a najveću od tih duljina nazivamo normom subdivizije i označavamo sa ||(||.Nad svakim intervalom [xi-1,xi] postavit ćemo dva pravokutnika, jedan koji leži ispod grafa, a drugi koji ga premašuje.
Kako je funkcija f neprekinuta na [a,b] tada je neprekinuta i na [xi-1,xi] i zato na tom intervalu poprima najveću vrijednost Mi i najmanju vrijednost mi. Sada imamo pravokutnike kojima je jedna stranica duljine (xi, dok im je druga stranica duljine mi ili Mi. Sada možemo površinu P ispod grafa funkcije aproksimirati sumama
EMBED Equation.3 i EMBED Equation.3
Sumu s nazivamo donjom sumom, a sumu S gornjom sumom. Za te sume vrijedi
s(P(S
3. RIEMANNOV INTEGRAL</x1<…<xi-1<xi<….<xn-1